Pismeni ispit iz predmeta **Diferencijalna geometrija**, 28.01.2013.

Bitna napomena: Svaku formulu koju mislite koristit, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka.

1. **(a)** Pokazati da kriva L: $x = \dfrac{t}{1+t^2+t^4}$, $y = \dfrac{t^2}{1+t^2+t^4}$, $z = \dfrac{t^3}{1+t^2+t^4}$, $t \in \mathbb{R}$, leži na nekoj sferi sa centrom $C(0; \frac{1}{2}; 0)$.

(b) Odrediti jednačinu tangente krive L: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $z = 4a \sin \dfrac{t}{2}$ u tački $M_0(t = \dfrac{\pi}{2})$. Odrediti ugao koji dobijena tangenta zaklapa sa z-osom.

2. **(a)** Pokazati da normalne ravni krive L: $x = a \sin^2 t$, $y = a \sin t \cos t$, $z = a \cos t$ prolaze kroz koordinatni početak.

(b) Odrediti jednačinu rektifikacione ravni krive L: $x^2 = 2z$, $y^2 = 2z$ u proizvoljnoj tački M_0 te krive.

3. Dokazati da je tangentna ravan u proizvoljnoj tački površi $(x-2z)^m + (y-3z)^n = 4$, $m, n \in \mathbb{N}$, paralelna pravoj $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{1}$.

4. Odrediti linije najvećeg nagiba površi $\vec{r} = \vec{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u + v)$.

Pismeni ispit iz predmeta **Diferencijalna geometrija**, 28.01.2013.

Bitna napomena: Svaku formulu koju mislite koristit, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka.

1. **(a)** Pokazati da kriva L: $x = \dfrac{t}{1+t^2+t^4}$, $y = \dfrac{t^2}{1+t^2+t^4}$, $z = \dfrac{t^3}{1+t^2+t^4}$, $t \in \mathbb{R}$, leži na nekoj sferi sa centrom $C(0; \frac{1}{2}; 0)$.

(b) Odrediti jednačinu tangente krive L: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $z = 4a \sin \dfrac{t}{2}$ u tački $M_0(t = \dfrac{\pi}{2})$. Odrediti ugao koji dobijena tangenta zaklapa sa z-osom.

2. **(a)** Pokazati da normalne ravni krive L: $x = a \sin^2 t$, $y = a \sin t \cos t$, $z = a \cos t$ prolaze kroz koordinatni početak.

(b) Odrediti jednačinu rektifikacione ravni krive L: $x^2 = 2z$, $y^2 = 2z$ u proizvoljnoj tački M_0 te krive.

3. Dokazati da je tangentna ravan u proizvoljnoj tački površi $(x-2z)^m + (y-3z)^n = 4$, $m, n \in \mathbb{N}$, paralelna pravoj $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{1}$.

4. Odrediti linije najvećeg nagiba površi $\vec{r} = \vec{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u + v)$.

Zadaci su skinuti sa stranice pf.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*

Pokazati da kriva $L:\ x=\dfrac{t}{1+t^2+t^4},\ y=\dfrac{t^2}{1+t^2+t^4},\ z=\dfrac{t^3}{1+t^2+t^4},\ t\in\mathbb{R}$ leži na nekoj sferi sa centrom $C(0,\frac{1}{2},0)$.

Rj.

Opšti oblik jednačine sfere sa centrom $C(0,\frac{1}{2},0)$ poluprečnika R je

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+z^2=R^2.$$

Ako uvrstimo našu krivu dobićemo

$$\left(\frac{t}{1+t^2+t^4}\right)^2+\left(\frac{t^2}{1+t^2+t^4}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{t^3}{1+t^2+t^4}\right)^2=$$

$$\frac{t^2}{(1+t^2+t^4)^2}+\frac{\big(\overbrace{2t^2-(1+t^2+t^4)}^{2t^2-1-t^2-t^4}\big)^2}{4(1+t^2+t^4)^2}+\frac{t^6}{(1+t^2+t^4)^2}=$$

$$=\frac{4t^2+(-1+t^2-t^4)^2+4t^6}{4(1+t^2+t^4)^2}=\frac{4t^2+1-t^2+t^4-t^2+t^4-t^6+t^4-t^6+t^8+4t^6}{4(1+t^2+t^4)^2}$$

$$=\frac{\overbrace{1+2t^2+3t^4+2t^6+t^8}^{=(1+t^2+t^4)^2}}{4\underbrace{(1+t^2+t^4)^2}}=\frac{1}{4}$$

$$=1+t^2+t^4+t^2+t^4+t^6+t^4+t^6+t^8=1+2t^2+3t^4+2t^6+t^8$$

Data kriva leži na sferi sa centrom $(0,\frac{1}{2},0)$ poluprečnika $R=\frac{1}{2}$.

(#) Odrediti jednačinu tangente krive $L: x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $z=4a\sin\frac{t}{2}$ u tački $M_0(t=\frac{\pi}{2})$. Odrediti ugao koji dobijena tangenta zaklapa sa z-osom.

Rj: Za $t=\frac{\pi}{2}$ iz datog sistema f-ja dobijamo da je

$$x_0=x(\tfrac{\pi}{2})=a(\tfrac{\pi}{2}-1),$$

$$y_0=y(\tfrac{\pi}{2})=a(1-0)=a$$

$$z_0=z(\tfrac{\pi}{2})=4a\sin\tfrac{\pi}{4}=2a\sqrt{2}$$

pa je $M_0(a(\frac{\pi}{2}-1), a, 2a\sqrt{2})$

Prisjetimo se

Ako tačka $M_0(x_0,y_0,z_0)$ pripada krivoj $L: \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \\ t\in I \end{cases}$ tada jednačina tangente na krivu L u tački M_0 glasi

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$$

gdje je $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)\neq 0$ $(\vec{a}=(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ vektor tangente.

$x'=a(1-\cos t)$, $y'=a\sin t$, $z'=4a\cos\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{2}=2a\cos\frac{t}{2}$

$x'(\frac{\pi}{2})=a$, $y'(\frac{\pi}{2})=a$, $z'(\frac{\pi}{2})=2a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}a$

$$\Rightarrow \frac{x-a(\frac{\pi}{2}-1)}{1}=\frac{y-a}{1}=\frac{z-2a\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$ jednačina tražene tangente

Odredimo ugao koji dobijena tangenta zaklapa sa z-osom.

Vektor tangente u tački M_0 je $\vec{t}=(1,1,\sqrt{2})$.
z-osa ima vektor pravca $\vec{p}=(0,0,1)$

$$\vec{p}\cdot\vec{t}=|\vec{p}||\vec{t}|\cos\sphericalangle(\vec{p},\vec{t}) \Rightarrow \cos\sphericalangle(\vec{p},\vec{t})=\frac{\vec{p}\cdot\vec{t}}{|\vec{p}||\vec{t}|}$$

$$\vec{p}\cdot\vec{t}=\sqrt{2}$$

$$|\vec{p}|=1, \quad |\vec{t}|=\sqrt{1+1+2}=\sqrt{4}=2$$

$$\cos\sphericalangle(\vec{p},\vec{t})=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ugao između tangente i z-ose je $\frac{\pi}{4}$ rad.

Pokazati da normalne ravni krive

$$L:\ x = a\sin^2 t,\quad y = a\sin t\cos t,\quad z = a\cos t$$

prolaze kroz koordinatni početak.

Rj. Prisjetimo se

Jednačina normalne ravni u nekoj tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$ krive $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \\ t \in I \end{cases}$ je $\dot{x}(x - x_0) + \dot{y}(y - y_0) + \dot{z}(z - z_0) = 0.$

(tačka M_0 i vektori $\vec{t}$ i $\vec{n}$ određuju normalnu ravan).

$$\dot{x} = 2a\sin t\cos t = a\sin 2t$$
$$\dot{y} = a\cos^2 t - a\sin^2 t = a\cos 2t$$
$$\dot{z} = -a\sin t$$

vektor tangente je
$\vec{t} = (a\sin 2t,\ a\cos 2t,\ -a\sin t)$

Jednačina normalne ravni krive u proizvoljnoj tački ima oblik

$$a\sin 2t\,(x - a\sin^2 t) + a\cos 2t\,(y - a\sin t\cos t) - a\sin t\,(z - a\cos t) = 0 \qquad /:a$$

$$(\sin 2t)x + (\cos 2t)y - (\sin t)z + (-a)\sin^2 t\underbrace{\sin 2t}_{2\sin t\cos t} + (-a)\sin t\cos t\underbrace{\cos 2t}_{(\cos^2 t - \sin^2 t)} + a\sin t\cos t = 0$$

$$(\sin 2t)x + (\cos 2t)y - (\sin t)z + \overbrace{(-a)2\sin^2 t\sin t\cos t + a\sin^2 t\sin t\cos t}^{(-a)\sin^2 t\sin t\cos t} + (-a)\cos^2 t\sin t\cos t + a\sin t\cos t = 0$$

$(\sin 2t)x + (\cos 2t)y - (\sin t)z = 0$

jednačina normalne ravni krive

iz čega vidimo da ravan sadrži tačku $O(0,0,0)$.

(#) Odrediti jednačinu rektifikacione ravni krive

$L: x^2 = 2z, \ y^2 = 2z$ u proizvoljnoj tački M_0 te krive.

Rj: Prisjetimo se

Jednačina rektifikacione ravni krive $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \\ t \in I \end{cases}$ u tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$ je

$$\ddot{x}(x - x_0) + \ddot{y}(y - y_0) + \ddot{z}(z - z_0) = 0$$

(tačka M_0 te vektori $\vec{b}$ i $\vec{t}$ određuju rektifikacionu ravan krive)

Parametrizirajmo datu krivu

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = 2z \\ y^2 = 2z \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow y = \pm x$$

Primjetimo da je $z = \frac{1}{2}x^2$

Ako sa t označimo x imamo $L: \begin{cases} x = t \\ y = \pm t \\ z = \frac{1}{2}t^2 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\dot{x} = 1 \qquad \ddot{x} = 0$

$\dot{y} = \pm 1 \qquad \ddot{y} = 0$

$\dot{z} = t \qquad \ddot{z} = 1$

Ako je $M_0 \in L$ tada $M_0(t_0, \pm t_0, \frac{1}{2}t_0^2)$

Jednačina rektifikacione ravni $\underbrace{\text{je}}_{}$ u tački M_0 $\quad z - \frac{1}{2}t_0 = 0$.

(#) Dokazati da je tangentna ravan u proizvoljnoj tački površi $(x-2z)^m+(y-3z)^n=4$, $m,n\in\mathbb{N}$, paralelna pravoj $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1}$.

Rj. Ako je površ zadana jednačinom $F(x,y,z)=0$ tada je $\vec{n}=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)$ vektor normale na površ.

(od ranije znamo da je $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$ jednačina ravni kroz tačku $M_1(x_1,y_1,z_1)$ i vektorom normale $\vec{n}=(A,B,C)$).

U našem slučaju

$$F(x,y,z)=(x-2z)^m+(y-3z)^n-4$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=m(x-2z)^{m-1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=n(y-3z)^{n-1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=m(x-2z)^{m-1}\cdot(-2)+n(y-3z)^{n-1}\cdot(-3)=-2m(x-2z)^{m-1}-3n(y-3z)^{n-1}$$

Vektor pravca prave $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1}$ je $\vec{p}=(2,3,1)$.

Tangentna ravan u proizvoljnoj tački date površi će biti sa pravom akko $\vec{p}\cdot\vec{n}=0$.

$$\vec{p}\cdot\vec{n}=2m(x-2z)^{m-1}+3n(x-2z)^{m-1}-2m(x-2z)^{m-1}-3n(y-3z)^{n-1}$$
$$=0$$

Tangentne ravni date površi su paralelne sa datom pravom.

Odrediti linije najvećeg nagiba površi

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = (u\cos v,\ u\sin v,\ u+v).$$

Rj.

Kriva na površi koja je normalna na nivovsku liniju površi $z=0$ zove se linija najvećeg nagiba.

Linije najvećeg nagiba su normalne na nivovske linije $z = C = u+v$ $(\Rightarrow\ u = C-v)$ čija je jednačina
$(z = u+v=C)$

$$\vec{r}_N = ((C-v)\cos v,\ (C-v)\sin v,\ C)$$

Diferencijalna jednačina nivovskih linija je

$$d\vec{r}_{(u+v=C)} \cdot d\vec{r}_N = 0$$

Kako je

$$d\vec{r}_N = (-\cos v - (C-v)\sin v,\ -\sin v + (C-v)\cos v,\ 0)$$

$$d\vec{r} = (\cos v\, du - u\sin v\, dv,\ \sin v\, du + u\cos v\, dv,\ du+dv)$$

$$d\vec{r}_{(u+v=C)} = (\cos v\, du - (C-v)\sin v\, dv,\ \sin v\, du + (C-v)\cos v\, dv,\ du+dv)$$

to je

$$d\vec{r}_N \cdot d\vec{r}_{(u+v=C)} = -\cos^2 v\, du + \underline{(C-v)\sin v\cos v\, dv} -$$

$$\underline{\underline{-(C-v)\sin v\cos v\, du}} + (C-v)^2\sin^2 v\, dv - \sin^2 v\, du -$$

$$\underline{\underline{-(C-v)\sin v\cos v\, dv}} + \underline{(C-v)\cos v\sin v\, du} +$$

$$+ (C-v)^2\cos^2 v\, dv = 0$$

$$-du + (C-v)^2 dv = 0$$

$$du = \underbrace{(C-v)^2}_{C^2-2Cv+v^2} dv \Rightarrow \boxed{u = C^2 v - Cv^2 + \frac{1}{3}v^3 + C_1 = f(v)}$$

Prema tome jednačina nivovskih linija je

$$\vec{r} = (f(v)\cos v,\ f(v)\sin v,\ f(v)+v).$$